Inversion de Fourier
dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Leçon : 235, 239, 250, 234, 236, (267) → si on calcule l'intégrale avec un chemin complexe.
Réf : El Amrani Fourier, Demoël Li ANAF, (poly Boffey EDP)
⚠ convent°

Lemme (Calcul de la TF de la Gaussienne).
Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on note $\hat{f} : \xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$.
Alors si $a > 0$, et $\gamma(x) = e^{-a|x|^2}$ sur $\mathbb{R}^d$, on a
$$\hat{\gamma}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-|\xi|^2/4a}.$$

Preuve
On va faire 3 preuves. (on fera juste 1)

	+	−
méthode 1 : EDO	facile	classique
" 2 : chgt variable et prolongement analytique	utile a.c	être au point sur les ∫ à paramètres et a.c
" 3 : intégrat° dans le plan complexe	267	idem

1) Via une EDO
On commence par $d=1$ (on généralise avec Fubini).
On pose $F : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-ixt} dx$.
Alors F est dérivable car $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-ax^2} e^{-ixt}$ l'est et
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \ |e^{-ax^2}(-ix e^{-ixt})| \leq |x| e^{-ax^2} \in L^1_x(\mathbb{R})$.
Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} (-ix) e^{-ixt}\, dx$$

$$= -i \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} x e^{-ixt}\, dx \quad \stackrel{\text{IPP}}{}$$

$$= +i \int_{\mathbb{R}} \frac{-1}{2a} e^{-ax^2} (-it) e^{-ixt}\, dx$$

$$= -\frac{t}{2a} F(t).$$

On résout l'EDO, on a $F(t) = F(0) e^{-t^2/4a}$.

Or $F(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Donc $F(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-t^2/4a} = (x \mapsto e^{-ax^2})^{\wedge}(\xi)$.

2) <u>Par prolongement analytique</u> [Queffélec–Zuily]

On pose pour $z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2} dx$.

Alors F est holomorphe sur $\mathbb{C}$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$

$z \mapsto e^{zx} e^{-x^2}$ est holomorphe, et si K est un compact de $\mathbb{C}$, avec $K \subset B(0,R)$, et $z \in K$, alors $|e^{zx - x^2}| = e^{x \operatorname{Re} z - x^2}$ et

$$\begin{cases} \text{si } |x| \geq 2R, & |x \operatorname{Re} z| - |x|^2 \leq |x|R - |x|^2 \leq -\frac{1}{2}|x|^2 \\ \text{si } |x| \leq 2R, & |x \operatorname{Re} z| - |x|^2 \leq 2R|\operatorname{Re} z| \leq 2R^2 \end{cases}$$

⚠ si $\int e^{zx^2} e^{-ax^2} dx$

Si $g(x) = e^{-1/2|x|^2} \mathbb{1}_{\{|x| \geq 2R\}} + e^{2R^2} \mathbb{1}_{\{|x| < 2R\}}$, alors $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $|e^{zx - x^2}| \leq g(x)$. Donc F holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Si $z \in \mathbb{R}$, on a

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x - \frac{1}{2}z)^2} e^{z^2/4} dx$$

Comme $z \in \mathbb{R}$, on peut faire un chgt de variable et poser $u = x - \frac{1}{2}z$. Donc

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{z^2/4}\, du = \sqrt{\pi}\, e^{z^2/4}.$$

Or $G : z \mapsto \sqrt{\pi}\, e^{z^2/4}$ est aussi holomorphe, et $F = G$ sur l'axe des réels. Donc par principe du prolongement analytique,
$F(z) = G(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

En particulier, $\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-x^2}\, dx = F(-i\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}$.

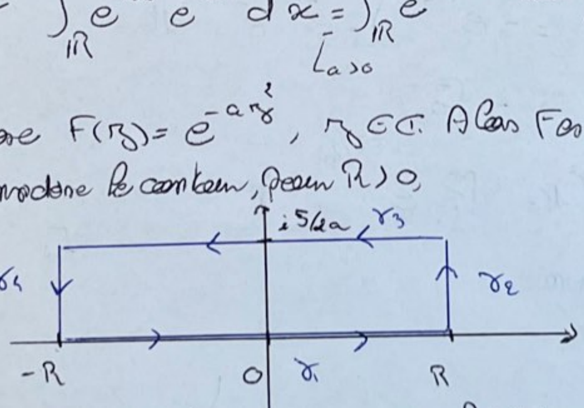
On peut le faire avec $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-ax^2}\, dx$
ou le déduire avec un chgt de variable.

→ on peut en déduire $\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-zx^2}\, dx$ pour $\mathrm{Re}(z) > 0$
par le même principe.

3) <u>Intégration dans le plan complexe</u>

On a $\underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\, dx}_{a>0} = \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x + \frac{i\xi}{2a})^2} e^{-\xi^2/4}\, dx$

On pose $F(z) = e^{-az^2}$, $z \in \mathbb{C}$. Alors F est holomorphe.
On considère le contour, pour $R > 0$,



$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ est fermé, donc par le théorème de Cauchy,
$\int_\gamma F(z)\, dz = 0$ (car F est holomorphe).

Donc :

$$0 = \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_3} F + \int_{\gamma_4} F.$$

Pour $i \in \{2, 4\}$, on a $|F(z)| = \left| e^{-a(\pm R + it)^2} \right| \leq e^{-aR^2} e^{a \xi^2/4a^2}$

à détailler en passant les calculs (au moins 1)

donc $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{\gamma_i} F = 0$. (à dém, à détailler).

Donc, si $\begin{cases} \gamma_1(t) = t, & t \in [-R, R] \\ \gamma_3(t) = -t + i\frac{\xi}{2a}, & t \in [-R, R] \end{cases}$

On a $\int_{\gamma_1} F(z)\,dz = \int_{-R}^{R} e^{-at^2} dt \to \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

et donc $\int_{\gamma_2} F(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \mp e^{-a(-t + i\xi/2a)^2} dt$

$$= -\int_{-R}^{R} e^{-a(t + i\xi/2a)^2} dt$$

$$= -e^{\xi^2/4a} \int_{-R}^{R} e^{-at^2} e^{-it\xi} dt$$

$$\to -\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

donc $\int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\xi^2/4a}$. $\square$

On passe au théorème.

Théorème

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i x \cdot \xi} d\xi.$$

On a comme corollaire immédiat que $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est injective.

<u>Preuve</u>

On considère le noyau de Gauss $\gamma(x) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/2}$.

~~Or~~ $\cancel{\gamma_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{d/2}} e^{-|x|^2/2\sigma} = \frac{1}{\sigma^{d/2}} \gamma\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma}}\right)}.$

~~Alors~~ $\cancel{\hat{\gamma}_\sigma(\xi) = (2\pi\sigma)^{-d/2} (2\pi\sigma)^d e^{-\xi^2/2\sigma} = (2\pi\sigma)^{d/2} e^{-\xi^2/2\sigma}} =$

<u>Idée.</u> $\cancel{\frac{1}{(2\pi)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i x \cdot \xi} d\xi$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i y \cdot \xi} dy \, e^{i x \cdot \xi} d\xi$$

<u>Pb</u> : on ne peut pas utiliser Fubini ici.

Donc on pose $I_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(y) e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon^2 |\xi|^2/4} dy d\xi.$

On pose $F_\varepsilon(y, \xi) = f(y) e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon^2 |\xi|^2/4}$.

Alors $F_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, dy d\xi)$ car

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |F_\varepsilon(y, \xi)| dy d\xi = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |f(y)| e^{-\varepsilon^2 |\xi|^2/4} dy d\xi \quad \text{(puis Fubini)}$$

Donc $I_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/4} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{i(x-y)\cdot\xi} dy \right) d\xi$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i x \cdot \xi} e^{-\varepsilon^2 |\xi|^2/4} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Or, $|e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/4} \hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)|$, donc par CVD,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/4} \hat{f}(\xi)\right) d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

On calcule maintenant

$$I_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/4} f(y) e^{-iy\cdot\xi} d\xi \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/4} d\xi}\, dy$$

$$= \left(x \mapsto e^{-\varepsilon^2 \frac{|x|^2}{4}}\right)^\wedge (y-x) \qquad \left(a = \frac{\varepsilon^2}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{4\pi}{\varepsilon^2}\right)^{d/2} e^{-|y-x|^2/\varepsilon^2}$$

$$I_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) (\pi)^{d/2} \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^d e^{-|y-x|^2/\varepsilon^2} dy$$

$$= \left(\frac{4\pi}{\varepsilon^2}\right)^{d/2} \int -$$

Si $\chi(x) = \pi^{-d/2} e^{-|x|^2}$, alors $\int \chi = 1$ et on pose

$\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \pi^{-d/2} \varepsilon^{-d} e^{-|x|^2/\varepsilon^2}$. Donc

$$I_\varepsilon(x) = (2\pi)^d \chi_\varepsilon * f(x).$$

χ_ε étant une approximation de l'unité, on a $\| \chi_\varepsilon * f - f \|_1 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.
(et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$)

Donc il existe une suite $(\varepsilon_m)_m$, cv vers 0, tq $(I_{\varepsilon_m})_m$ cv vers $(2\pi)^d f$ p.p sur $\mathbb{R}^d$.

Ainsi, p.p, on a $(2\pi)^d f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi$.

$\square$